

Geometrie

Strahlensatz-Anwendung

Teil 4:
Konstruktionen
mit Hilfe der Strahlensätze

Dat. Nr. 1414

Stand: 3. September 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Inhalt der Texte zu zentrischen Streckungen und Strahlensätzen

Datei 11410	Keine Ahnung von Strahlensätzen	Kompakt das Wichtigste!	
Datei 11411	Zentrische Streckungen – Teil 1		
1	Zentrische Streckungen – Einführung		3
2	Zentrische Streckungen – Untersuchungen im Achsenkreuz 6 ausführliche große Beispiele		6
Datei 11412:	Zentrische Streckungen – Teil 2		
3	Die Strahlensätze		3
4	Der sogenannte 3. Strahlensatz		14
5	Die Umkehrung der Strahlensätze		15
6	Anwendung der Strahlensätze (Berechnungen)		17
Datei 11413:	Zentrische Streckung und Ähnlichkeit		
7	Ähnlichkeitsabbildungen (1)		3
8	Ähnliche Dreiecke		8
9	Ähnlichkeitsabbildungen		10
Datei 11414:	Konstruktionen mit Hilfe der Strahlensätze (über Text)		
1	Darüber sollte man zuerst nachdenken		3
2	Konstruktionen		6
(1)	Strahlensatz im Verhältnis 5:3 konstruieren		6
(2)	Größtes Quadrat im Dreieck ist gesucht (1)		7
(3)	Größtes Quadrat im Dreieck ist gesucht (2)		8
(4)	Rechteck im Kreis		9
(5)	Dreieck mit Umkreis		10
(6)	Rechteck im Dreieck		11
(7)	Dreiecke konstruieren		12
(8)	Strecke der Strecke $r \cdot s$ konstruieren		14
(9)	Strecke in viele Teile zerlegen		15
(10)	Es gibt einen inneren und einen äußeren Teilpunkt		15
(11)	Harmonische Teilung einer Strecke		16
(12)	Winkelhalbierende teilt Gegenseite		19

3. Größtes Quadrat ist gesucht (2)

Gegeben ist ein Dreieck $P_1P_2P_3$. Gesucht ist das flächengrößte einbeschriebene Quadrat, dessen Kante auf P_1P_2 liegt.

Konstruktion:

1. Man zeichnet zur Grundseite P_1P_2 eine Parallele, die das Dreieck in zwei Punkten E und F schneidet. Der Abstand der Parallelen von der Grundseite ist beliebig aber so, dass das Quadrat mit der Seiten EF im Dreieck liegt.
2. Dann zeichnet man die Linien P_3H und P_3G ein, welche die Grundseite P_1P_2 in A und B schneidet. Diese Punkte bilden die Grundseite des gesuchten Quadrats ABCD.

Berechnung der Quadratseite mit dem 2. Strahlensatz:

Zur Berechnung muss vom Dreieck die Grundseite $c = \overline{P_1P_2}$ und die Höhe h bekannt sein.

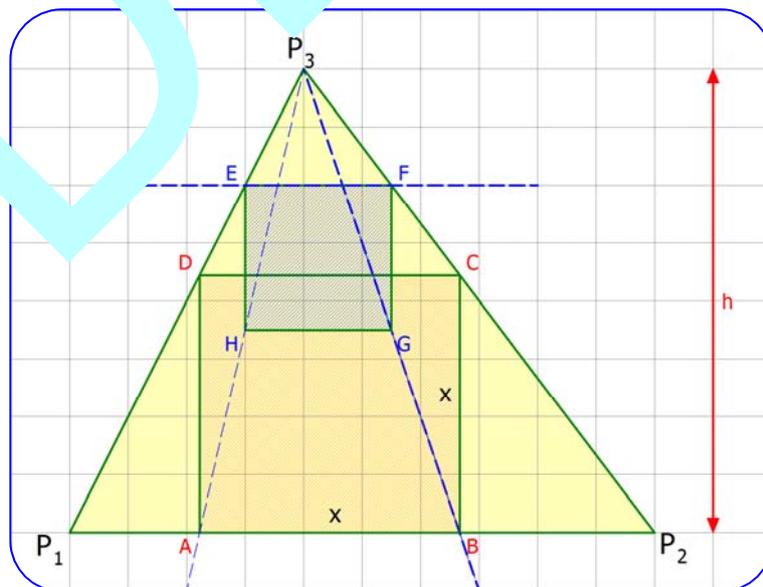
Gesucht ist die Quadratseite $c = x = \overline{AB} = \overline{AD}$. Dann gilt:

$$\frac{h}{h-AD} = \frac{\overline{P_1P_2}}{DC} \quad \leftarrow \quad \frac{h}{x} = \frac{c}{x}$$

Daraus folgt: $hx = c(h-x) \Leftrightarrow hx = ch - cx$

und $hx + cx = ch \Rightarrow x = \frac{ch}{h+c}$

Die Beispielabbildung hat $c = 18$, $h = 8$ cm, also $x = \frac{80}{18}$ cm $\approx 4,44$ cm.



4. Gesucht ist ein Rechteck im Kreis

Gesucht ist ein Rechteck, dessen Eckpunkte auf einer Kreislinie mit Radius 5 cm liegen, und dessen Seiten das Verhältnis 3 : 2 haben.

Konstruktion:

Man zeichnet ein Rechteck $A'B'C'D'$ mit diesem Seitenverhältnis, hier etwa mit 6 cm und 4 cm Seitenlänge. Sein Mittelpunkt muss auch der Mittelpunkt des Kreises mit dem gegebenen Radius 5 cm sein. Dann zeichnet man die Diagonalen des Rechtecks. Sie schneiden den Kreis k in den gesuchten Eckpunkten $ABCD$.

Berechnung:

Die Strecken $B'C'$ und BC sind parallel (wie bei jeder zentralen Streckung).

Also gilt nach dem 2. Strahlensatz: $\frac{\overline{ME}}{\overline{MF}} = \frac{\overline{EC'}}{\overline{FC}}$ $\overline{FC} = \frac{\overline{EC'} \cdot \overline{MF}}{\overline{ME}} = \frac{2 \cdot \overline{MF}}{3} = \frac{2}{3} \overline{MF}$

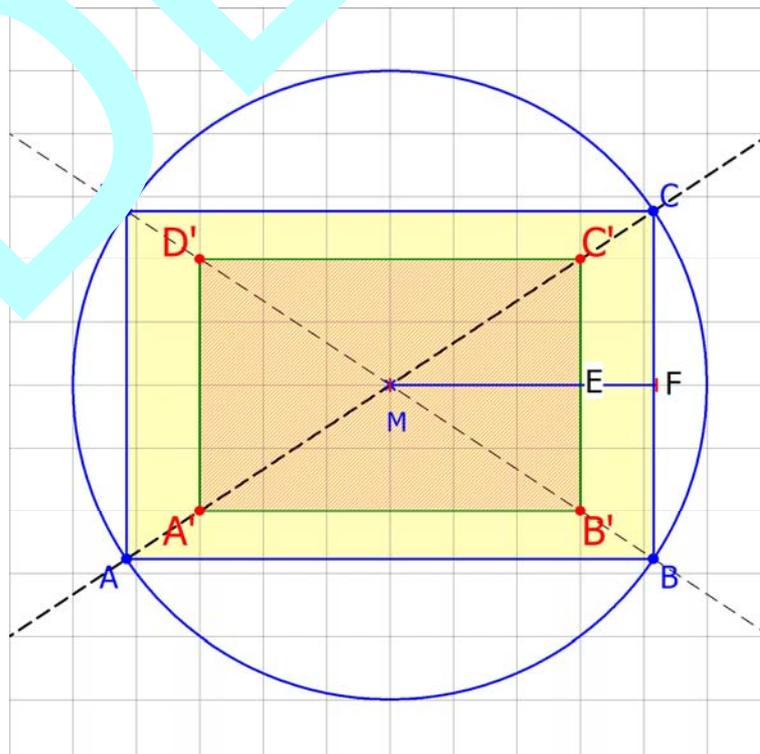
Außerdem gilt nach Pythagoras: $\overline{MF}^2 + \overline{FC}^2 = \overline{MC}^2 = 25$

Einsetzen: $\overline{MF}^2 + \frac{4}{9} \overline{MF}^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{13}{9} \overline{MF}^2 = 25$

Daraus folgt: $\overline{MF} = \frac{9}{13} \cdot 5$ $\overline{MF} = \sqrt{\frac{9 \cdot 25}{13}} \approx 4,16$

$$\overline{FC} = \frac{2}{3} \cdot 4,16 \approx 2,77$$

Ergebnis: Das gesuchte Rechteck hat die Seitenlängen 8,32 cm und 5,55 cm.



6. **Gesucht ist ein maximales Rechteck im Dreieck**

Zeichne ein Dreieck ABC mit $a = 5,2$ cm, $b = 7,5$ cm und $c = 6,1$ cm.

Konstruiere ein maximales Rechteck EFGH, dessen Grundseite auf AB liegt und dessen andere Ecken auf AC und BC liegen. Sein Seitenverhältnis soll 5:2 sein.

Konstruktion:

Zeichne das Dreieck ABC.

Dann zeichne eine Parallele im Abstand 2 Einheiten = 1 cm zur Strecke AB.

Ihr Schnittpunkt mit AC sei H'. Zeichne dann ein Rechteck E'F'G'H'.

E'F' auf AB liegt. Diese Grundseite muss dann 5 Längeneinheiten = 2,5 cm hoch sein.

Dieses Rechteck hat nun das geforderte Seitenverhältnis.

Weil die Ecken E' und H' schon auf den Dreiecksseiten liegen, führt eine zentrische Streckung

Von A aus, damit G auf BC liegt.

Dazu zeichnet man die Halbgerade [AG'). Ihr Schnittpunkt mit BC ist G.

Die Parallele zu H'G' durch G schneidet AC in H, das Lot von G auf AB schneidet AB in F.

